εκπαιδευτικός οργανισμός ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τμήματα: (Κ)ΓΤ2 – (Κ)ΓΤ4 – (Θ)ΓΤ7 – (Θ)ΓΤ8 **Κυριακή 17.10.2010**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται "1-1"; **Μονάδες 3**

Β. Να αποδείξετε ότι: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ **Μονάδες 6**

Γ. Να αποδείξετε ότι $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. **Μονάδες 6**

Δ. Να χαραχτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη «Σωστό» ή «Λάθος»:

(α) Αν $z \cdot \overline{z}^2 \in \mathbb{R}$ τότε $z \in \mathbb{R}$.

(β) Αν $|z_1| = |z_2|$ τότε $z_1 = z_2$.

(γ) Οι εικόνες των μιγαδικών $z, \overline{z}, -z, -\overline{z}$ είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(δ) Αν $\alpha < \gamma$ και $\beta < \delta$ τότε $\alpha + \beta i < \gamma + \delta i$.

(ε) Η εικόνα του μιγαδικού $z = 1 - i$ είναι σημείο της ευθείας $y = x$.

(στ) Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο.

(ζ) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

(η) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι $f(0) = f(1)$ τότε η f δεν είναι «1-1».

(θ) Αν οι f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0, τότε: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

(ι) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - g(x)\right) = m \in \mathbb{R}$ τότε οι συναρτήσεις f,g έχουν πάντοτε όριο στο x_0. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω $f(z) = z^2 - 4z + 13$, $z \in \mathbb{C}$ και ο μιγαδικός $u = 6 + (-3 + 2\sqrt{5})i$.

Α. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης $f(z) = 0$ **Μονάδες 6**

Β. Να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και του μιγαδικού u σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο στο μιγαδικό επίπεδο. **Μονάδες 6**

Γ. Να δείξετε ότι ο μιγαδικός $w = z_1^{2010} + z_2^{2010}$ είναι πραγματικός. **Μονάδες 7**

Δ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη σχέση $f(z) = |z|^2 - 4z + 13$. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x^2 - 1$.

Α. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - \sqrt{2}}{5x - 4 - 2g(x)}$ **(β)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\eta\mu(x-2)}{f^2(x) - 2}$ **Μονάδες 8**

Β. Να βρεθεί η συνάρτηση $f \circ g$. **Μονάδες 5**

Γ. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(g(x)) - \sqrt{3}}{x^2 - 5x + 6}$ **Μονάδες 5**

Δ. Αν $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{h(x) - 1}{x - 1} = 3$ να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{h(x) + g(x) - 2x + 1}{1 - x}$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - \ln x$ και $g(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

Α. Να δείξετε ότι η g είναι "1 – 1" **Μονάδες 6**

Β. Να βρείτε την g^{-1}. **Μονάδες 6**

Γ. Να βρείτε τη συνάρτηση $g^{-1} \circ f$. **Μονάδες 6**

Δ. Να λύσετε την ανίσωση $g^{-1}(f(x)) > 0$. **Μονάδες 7**