εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ

ΚΥΡΙΑΚΗ 24. 01. 2010

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών. **Μονάδες 8**

Β. Έστω f(x) = συνx. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $f'(x) = -\eta\mu x$. **Μονάδες 7**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

α. Έστω f συνεχής στο [α, β] και υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε $f(\alpha)f(\beta) < 0$. **Μονάδες 2**

β. Είναι $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$. **Μονάδες 2**

γ. Είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$. **Μονάδες 2**

δ. Αν μία συνάρτηση f είναι "1 – 1" και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ισχύει το Θεώρημα Rolle. **Μονάδες 2**

ε. Αν για μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχουμε $f(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, με f(1) = 1, τότε f(x) > 0. **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{1}{z} = -1$, $z \in \mathbb{C}^*$ και z_1, z_2 οι ρίζες της. Να αποδείξετε ότι:

Α. $z_1 \cdot z_2 = 1$ και $z_1^3 = 1$. **Μονάδες 4**

Β. $\left(z_1^{2009} + z_2^{2009}\right) \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 4**

Γ. $z_1^8 + \frac{1}{z_2^{10}} + 1 = 0$. **Μονάδες 4**

Δ. Αν f(x) συνάρτηση παραγωγίσιμη στο [0, 1] με $f(0) - 2 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ και $f(1) = \frac{1}{2z_1} + \frac{1}{2z_2} - \frac{3}{2}$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$, ώστε $f(x_0) = 3x_0 - 2$. **Μονάδες 7**

Ε. Αν Γ είναι η εικόνα του μιγαδικού $w = 2z_1 + 2z_2$ και Α, Β οι εικόνες των z_1 και z_2 αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -f(2-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι "1 – 1". **Μονάδες 8**

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μοναδική ρίζα την οποία και να βρείτε. **Μονάδες 8**

γ. Έστω $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ όπου f' συνεχής. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$ σχηματίζει με αυτόν γωνία 45°. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf(x) - 2 = f(x) - \sqrt{3x^2+1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της f. **Μονάδες 8**

Β. Αν η ευθεία ε : y = 2x + 1 εφάπτεται της C_f στο $x_0 = -1$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -1} \frac{f^2(x) - 1}{x+1}$. **Μονάδες 9**

Γ. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $2x \le f(x) \le x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη στο σημείο (1, f(1)), της οποίας και να βρείτε την εξίσωση. **Μονάδες 8**

Καλή τύχη