

ΘΕΜΑ 1°

- A.** Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Μέσης τιμής. **Μονάδες 5**
- B.** Να δείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 είναι και συνεχής σε αυτό. **Μονάδες 5**
- Γ.** Να δώσετε τον ορισμό της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f , σε ένα σημείο της x_0 . **Μονάδες 5**
- Δ.** Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους.
- i.** Αν $f'(x) = g'(x) \forall x \in \mathbb{R}^*$ τότε $f(x) = g(x) + c, x \in \mathbb{R}^*$
- ii.** Αν η f είναι 1-1 τότε η f είναι γνησίως μονότονη
Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι σταθερή στο διάστημα Δ .
- iii.** Αν $f'(x) = 0 \forall x \in A$ τότε η f είναι σταθερή στο σύνολο A .
- iv.** Η $f(x) = \sqrt{x}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις των Θ.Μ.Τ στο $[0,1]$
- v.** Αν f πολυωνμική παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} τότε μεταξύ δύο ριζών της f υπάρχει μια το πολύ ρίζα της f' **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x + \alpha, & x \leq -\frac{4}{3} \\ 2x + 1, & x > -\frac{4}{3} \end{cases}$ η οποία είναι συνεχής.

- α.** Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 8**
- β.** Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -\frac{4}{3}$ **Μονάδες 6**
- γ.** Για $x \neq -\frac{4}{3}$ να βρείτε την $f'(x)$ και να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f'(x) = \frac{1}{2}$ **Μονάδες 8**
- δ.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 0$ **Μονάδες 3**

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με $\operatorname{Re}(z) \neq 0, \operatorname{Im}(z) \neq 0$ και $|\operatorname{Re}(z)| > |\operatorname{Im}(z)|$. Αν $z + \frac{1}{z} = f(\alpha)$ και $z^2 + \frac{1}{z^2} = f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι:

- α.** $|z| = 1$ **Μονάδες 11**
- β.** $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$ **Μονάδες 5**
- γ.** Η εξίσωση $x^3 f(\alpha) + f(\beta) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 4°

Έστω $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $g(\alpha) = \alpha$ και $g(\beta) = \beta$ με $0 < \alpha < \beta$. Να δείξετε ότι:

- i.** Υπάρχει σημείο της C_g στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 2011$. **Μονάδες 8**
- ii.** Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = \frac{\alpha + \beta}{2}$ **Μονάδες 8**
- iii.** Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε $\frac{1}{g'(\xi_1)} + \frac{1}{g'(\xi_2)} = 2$ **Μονάδες 9**

Κ α λ ή τ ύ χ η