

ΘΕΜΑ Α

A₁. Να αποδείξετε ότι $|a + b| \leq |a| + |b|$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

A₂. Τι ονομάζουμε απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού a .

(Μονάδες 7)

A₃. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

1. Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει : $|-x| \geq x$.

2. Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει : $|-x^2 - 3| = x^2 + 3$.

3. Αν $ab \neq 0$ τότε $a \neq 0$ ή $b \neq 0$.

4. Αν a, b ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί τότε $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι παραστάσεις : $A = 2a^2 + b^2 + 9$ και $B = 2a(3 - b)$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

B₁. Να δείξετε ότι $A - B = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 6a + 9)$.

(Μονάδες 7)

B₂. Να δείξετε ότι $A \geq B$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

B₃. Να βρείτε τις τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $A = B$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι παραστάσεις $A = |x - 3|$ και $B = |-x + 4|$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ₁. Να αποδείξετε ότι $A^2 - B^2 = 2x - 7$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 12)

Γ₂. Να αποδείξετε ότι $A^2 - B^2 < x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁. α. Να δείξετε ότι : $\frac{a^3 - b^3}{(a + b)^2 - ab} = a - b$, με $a \neq b$.

(Μονάδες 8)

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $\frac{123^3 - 23^3}{146^2 - 123 \cdot 23}$.

(Μονάδες 8)

Δ₂. Να δείξετε ότι : $\left| \frac{a}{b} \right| + \left| \frac{b}{a} \right| \geq 2$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$ και $b \neq 0$.

(Μονάδες 9)

Κ α λ ή τ ύ χ η !